

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Profil real, specializarea științele naturii

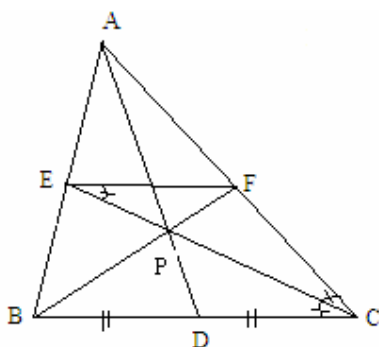
BAREM DE CORECTARE CLASA A IX-A

1. În triunghiul ABC , mediana AD și bisectoarea CE se intersectează în P .

Notăm $\{F\} = BP \cap AC$.

- a) Folosind relația dată de Teorema lui Ceva, demonstrați că $EF \parallel BC$.
 b) Demonstrați că triunghiul CEF este isoscel.

Soluție:



a) $\frac{AF}{FC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BE}{EA} = 1$ 2 p

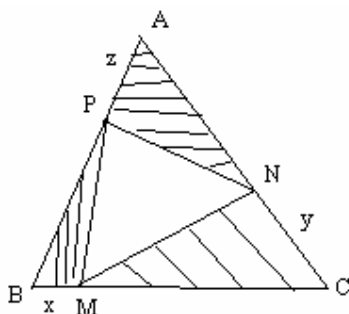
Deduce $\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{BE} \Rightarrow EF \parallel BC$ 2 p

b) Deducem că $\widehat{FEC} \equiv \widehat{ECB}$ (alterne interne), de unde $\widehat{FEC} \equiv \widehat{FCE}$, adică $\triangle CEF$ este isoscel 3p

2. Se consideră triunghiul echilateral ABC , având latura de lungime 2 cm. Pe laturile acestuia se iau punctele $M \in BC, N \in AC, P \in AB$ astfel încât $BM = x, CN = y$ și $AP = z$, unde $x, y, z \in (0, 2)$.

- a) Calculați aria triunghiului ABC ;
 b) Calculați ariile triunghiurilor PBM, MCN și PAN , în funcție de x, y, z .
 c) Duceți că: $x(2-z) + y(2-x) + z(2-y) < 4$.

Soluție:



a) $A_{\triangle ABC} = \sqrt{3}cm^2 \quad \left(A_t = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} \right)$ 1p

b) $A_{\triangle PBM} = \frac{BM \cdot BP \cdot \sin \hat{B}}{2} = \frac{x(2-z)\sqrt{3}}{4}$ 1p

$A_{\triangle MCN} = \frac{CN \cdot CM \cdot \sin \hat{C}}{2} = \frac{y(2-x)\sqrt{3}}{4}$ 1p

$A_{\triangle PAN} = \frac{AP \cdot AN \cdot \sin \hat{A}}{2} = \frac{z(2-y)\sqrt{3}}{4}$ 1p

c) $A_{\triangle PBM} + A_{\triangle MCN} + A_{\triangle PAN} < A_{\triangle ABC} \Rightarrow x(2-z) + y(2-x) + z(2-y) < 4$ 3p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Profil real, specializarea științele naturii

3. a) Demonstrați că $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{4}{a+b}, (\forall) a, b \in \mathbb{R}_+, a \neq b$.

b) Demonstrați că $\frac{1}{501} + \frac{1}{502} + \dots + \frac{1}{1000} > \frac{13}{20}$.

Soluție:

a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} > \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)^2 > 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 > 0$, adevărat

sau

Din inegalitatea mediilor avem că $\frac{a+b}{2} > \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}, (\forall) a, b \in \mathbb{R}_+, \text{ cu } a \neq b$, deci $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{4}{a+b}$ **3p**

b) Grupăm în perechi fracțiile egal depărtate de capete:

$\left(\frac{1}{501} + \frac{1}{1000}\right) + \left(\frac{1}{502} + \frac{1}{999}\right) + \dots + \left(\frac{1}{750} + \frac{1}{751}\right)$ **1p**

Aplicând punctul a) avem că $\frac{1}{501} + \frac{1}{1000} > \frac{4}{1501}; \frac{1}{502} + \frac{1}{999} > \frac{4}{1501}; \dots; \frac{1}{750} + \frac{1}{751} > \frac{4}{1501}$ **2p**

Prin sumarea acestor inegalități obținem că suma din stânga este mai mare decât $250 \cdot \frac{4}{1501}$.

Cum $\frac{1000}{1501} > \frac{13}{20}$ rezultă concluzia problemei **1p**

4. Doi melci M_1 și M_2 au plecat la ora 7 dimineața din punctul A spre punctul B, mergând în linie dreaptă. Viteza lui M_1 este de 12 m / oră. La început M_2 a avut o viteză de 8 m / oră dar, la 2 ore de la plecare s-a suit pe spatele unei broaște țestoase T care plecase tot din A spre B cu viteza de 20 m / oră. Melcul M_2 și broasca T l-au ajuns pe M_1 și după încă 4 ore au ajuns în B. Melcul M_2 a coborât imediat de pe spatele lui T și a plecat din B spre A cu o viteză mai mică de 4 m / oră.

a) La ce oră M_2 îl ajunge pe M_1 ?

b) Care este distanța dintre A și B ?

c) Între ce ore (numere întregi) M_1 l-a întâlnit pe M_2 , care se întorcea din B spre A ?

	A	→			B
Ora					
Distanța parcursă de:					
M_1	7	9	10		
M_2	0	24	36		
	0	36	36		

Soluție:

a) Până la ora 9 melcul M_1 parcurge 24 m iar melcul M_2 parcurge 16 m **1p**

b) Până la ora 10 melcul M_1 parcurge 36 m iar melcul M_2 parcurge $16 + 20 = 36$ m

(deci la ora 10 M_2 îl ajunge pe M_1) **1p**

(Dacă face direct această afirmație se acordă **2p**)

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011

Profil real, specializarea științele naturii

b) M_2 și T ajung în B la ora 14, deci distanța dintre A și B este $36 + 4 \cdot 20 = 116$ m **1p**

c) La ora 14 melcul M_2 se afla la $7 \cdot 12 = 84$ m de A și mai are de parcurs $116 - 84 = 32$ m până în B

..... **1p**

În următoarele 2 ore melcul M_1 a mai parcurs încă 24 m și mai are de parcurs încă 8 m până în B

..... **1p**

În aceste 2 ore, M_2 a parcurs mai puțin de 8 m și deci încă nu s-au întâlnit **1p**

M_1 și M_2 se întâlnesc între orele 16 și 17 **1p**

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011

Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE CLASA A X-A

1. Rezolvați ecuațiile:

a) $\log_3(x+3) \cdot \log_{x-3} 3 = 2, x \in \mathbb{R};$

b) $4^x - 9^x = 10^x - 15^x, x \in \mathbb{R}.$

Soluție:

a) Condiții necesare: $x+3 > 0, x-3 > 0$ și $x-3 \neq 1$ 1p

$\log_3(x+3) \cdot \log_{x-3} 3 = 2 \Leftrightarrow \log_3(x+3) \cdot \frac{1}{\log_3(x-3)} = 2 \Leftrightarrow \log_3(x+3) = \log_3(x-3)^2$ 1p

$x+3 = (x-3)^2 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$ cu $x_1 = 1$ (respinsă de $x-3 > 0$), $x_2 = 6$ soluție unică 1p

b) $4^x - 9^x = 10^x - 15^x \Leftrightarrow (2^x - 3^x)(2^x + 3^x - 5^x) = 0$ 1p

$2^x - 3^x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Rightarrow$ Soluție $x = 0$ 1p

$2^x + 3^x - 5^x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$ 1p

Soluție unică $x = 1$, deoarece $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x$ strict monotonă 1p

2. Se consideră ecuația $z^2 + 2i(\cos a) \cdot z - \cos^2 a = 0$, unde $a \in \mathbb{R}$. Determinați valorile lui a pentru care ecuația admite soluția $z = i \cdot \sin a$.

Soluție:

Avem că $i^2 \sin^2 a + 2i^2 \cos a \cdot \sin a - \cos^2 a = 0$, adică $(\sin a + \cos a)^2 = 0$ sau $\sin 2a = -1$ 4p

Deducem că $\sin a + \cos a = 0$, de unde $a = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ sau din $2a = (-1)^k \frac{3\pi}{2} + k\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow a = (-1)^k \cdot \frac{3\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ 3p

3. a) Demonstrați că $x - y = \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}\right), \forall x, y \in \mathbb{R};$

b) Demonstrați că $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$, oricare ar fi numărul natural nenul n

Soluție:

a) Demonstrează prin calcul direct relația din ipoteză 2p

b) Inegalitatea revine la

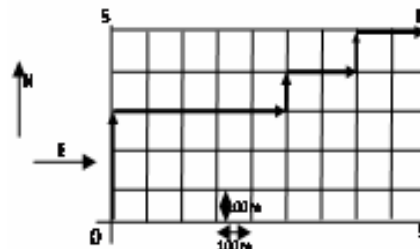
$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{n^2}}$ 3p

Însă $\sqrt{n+1} = (n+1)^{\frac{1}{2}} < (n+1)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(n+1)^2}$ și $\sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}} \leq n^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{n^2}$, de unde rezultă inegalitatea

din enunț 2p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Profil real, specializarea științele naturii

4. În desenul alăturat avem o parte din străzile orașului New York. Oswald se află în $O(0,0)$ și dorește să ajungă cât mai repede la Mary aflată în $M(9,5)$. El trebuie să meargă doar spre nord sau spre est, plecând din O pe o linie poligonală (ca în figura alăturată)



- a) Câți metri trebuie meargă spre est (orizontal) și câți spre nord (vertical) pentru a ajunge în M?
 b) În câte moduri poate parcurge astfel Oswald drumul din O în M? (Coordonatele punctului M sunt exprimate în unități de lungime, iar o unitate de lungime este 100 m)

Soluție:

Orice drum ar alege el trebuie să facă 900m orizontal (spre est) și 500 m vertical (spre nord) **3p**

Numărul drumurilor de lungime minimă va fi $C_{14}^9 = 2002$ **4p**

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE CLASA A XI-A

1. Se dau funcțiile $f, g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$ și

$$g(x) = x\sqrt{1-x^2} - \arcsin x - 4\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x}\right).$$

a) Calculați $f'(x)$ și $g'(x)$.

b) Demonstrați că $f(x) = 2\pi + g(x)$, $\forall x \in [0,1]$

Soluție:

a) $f'(x) = 2\sqrt{1-x^2}$ **2p**

$g'(x) = 2\sqrt{1-x^2}$ **2p**

b) Deducem că: $f(x) - g(x) = c$, $\forall x \in [0,1]$ **1p**

Pentru $x=1$ avem $c = f(1) - g(1) = 2\pi$ sau pentru $x=0$ avem $c = f(0) - g(0) = 2\pi$ **1p**

Așadar $f(x) = 2\pi + g(x)$, $\forall x \in [0,1]$ **1p**

2. Un obiect este lăsat să cadă liber; presupunem că rezistența aerului este proporțională cu pătratul vitezei pe care o atinge obiectul. Timpul t (în secunde) necesar pentru ca obiectul să atingă viteza v (în metri / secundă) este dat de regula $t(v) = \ln \frac{60+v}{60-v}$, $v \in [0,60)$.

a) În cât timp obiectul ajunge de la viteza $v = 0$ m/s până la viteza $v = 27,57$ m/s? ($\ln 2,71 \approx 1$)

b) Ce viteză atinge obiectul după 3 secunde? ($e^3 \approx 19,90$)

c) Determinați asimptota verticală a funcției $t = t(v)$.

Notă. În calcule se va considera pentru numărul lui Euler e valoarea aproximativă 2,71, iar numerele vor fi scrise cu două zecimale exacte.

Soluție:

a) Avem că $t(0) = \ln 1 = 0$, iar $t(27,57) = \ln 2,71 = 1$, deci timpul cerut este de 1 secundă. **2p**

b) Ecuația $\ln \frac{60+v}{60-v} = 3$ are soluția $v = 54,26$ m/s. **3p**

c) Domeniul de definiție al funcției $t = t(v)$ este $[0,60)$. Întrucât $\lim_{v \nearrow 60} t(v) = +\infty$, rezultă că dreapta de ecuație $v = 60$ este asimptotă verticală (la stânga) pentru funcția t **2p**

3. În $M_3(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Demonstrați că $A^3 = O_3$ și $\det(I_3 + A) \cdot \det(I_3 - A + A^2) = 1$

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Profil real, specializarea științele naturii

b) Calculați $2 \cdot A + 3 \cdot A^2 + 4 \cdot A^3 + \dots + 2011 \cdot A^{2010}$

c) Calculați $(I_3 + A)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Soluție:

a) $A^3 = O_3$ 1p

$\det(I_3 + A) \cdot \det(I_3 - A + A^2) = \det[(I_3 + A)(I_3 - A + A^2)] = \det(I_3^3 + A^3) = \det(I_3 + O_3) =$
 $= \det I_3 = 1$ (sau calculează separate fiecare determinant) 2p

b) Din $A^3 = O_3 \Rightarrow A^n = O_3, \forall n \geq 3$ 1p

$2 \cdot A + 3 \cdot A^2 + \dots + 2011 \cdot A^{2010} = 2 \cdot A + 3 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 1p

c) $(I_3 + A)^n = C_n^0 \cdot I_3^n + C_n^1 \cdot I_3^{n-1} \cdot A + C_n^2 \cdot I_3^{n-2} \cdot A^2 + C_n^3 \cdot I_3^{n-3} \cdot A^3 + \dots$ 1p

$(I_3 + A)^n = I_3 + nA + \frac{n(n-1)}{2} \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 1p

4. Fie $a \in \mathbb{R}$ și matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1+2a & a \\ -2a & 1-a \end{pmatrix}$

a) Demonstrați că $X(a) \cdot X(b) = X(a+b+ab)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$;

b) Demonstrați că $X^n(1) = X(2^n - 1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Soluție:

a) Demonstrează relația din ipoteză prin calcul direct 2p

b) Verifică relația $X^2(1) = X(3) = X(2^2 - 1)$ 2p

Presupune ca $X^k(1) = X(2^k - 1)$ 1p

$X^{k+1}(1) = X^k(1) \cdot X(1) = X(2^k - 1 + 1 + 2^k - 1) = X(2^{k+1} - 1)$ 2p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE CLASA A XII-A

1. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)e^{-x}$. Notăm $A(n)$ aria mulțimii plane mărginită de graficul funcției f , axa Ox și dreptele $x=1$ și $x=n$, unde $n \in (1, \infty)$.

a) Calculați $A(n)$.

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} A(n)$.

Soluție:

$$A(n) = \int_1^n (x-1)e^{-x} dx = \int_1^n (-e^{-x})'(x-1) dx = -e^{-x}(x-1) \Big|_1^n + \int_1^n e^{-x} dx =$$

$$= -e^{-n}(n-1) - e^{-1} + e^{-1} = -\frac{n}{e^n} + \frac{1}{e} \dots\dots\dots \mathbf{5p}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(n) = \frac{1}{e} \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

2. Calculați: $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} \cdot dx$

Soluție:

Metoda 1

$$\frac{x^2+1}{x^4+1} = \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2 - (\sqrt{2} \cdot x)^2} = \frac{x^2+1}{(x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1)(x^2 + \sqrt{2} \cdot x + 1)} = \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

$$= \frac{Ax+B}{x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1} + \frac{Cx+D}{x^2 + \sqrt{2} \cdot x + 1} \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$\Rightarrow x^2+1 \equiv (Ax+B)(x^2 + \sqrt{2} \cdot x + 1) + (Cx+D)(x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1) \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=1/2 \\ C=0 \\ D=1/2 \end{cases} \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1} \cdot dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2} \cdot x + 1} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d_x}{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{d_x}{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \arctg(x\sqrt{2} - 1) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \arctg(x\sqrt{2} + 1) + C =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot [\arctg(x\sqrt{2} - 1) + \arctg(x\sqrt{2} + 1)] + C \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Profil real, specializarea științele naturii

Metoda 2 (soluție deosebită)

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1} \cdot dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} \cdot dx = \int \frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)' \cdot dx}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 + (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \arctg\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right) + C \dots\dots\dots 7p$$

3. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; M_t = \frac{t}{2} \cdot A + \frac{1}{2t^2} \cdot B$, iar $G = \{M_t \mid t > 0\}$.

- a) Calculați: $A^2, B^2, A \cdot B, B \cdot A$
- b) Arătați că G este parte stabilă a mulțimii $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricilor.
- c) Arătați că (G, \cdot) este un grup abelian.

Soluție:

- a) Pentru fiecare din cele 4 cerințe câte 0,5 p **2p**
- b) Efectuează calculele și folosește corect punctul anterior **2p**
- c) Scrierea corectă a celor 5 axiome, invocarea punctului b) și verificarea celorlalte.. **3p**

4. Se dă polinomul cu coeficienți reali $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

- a) Dacă $a, b, c \in \mathbb{Q}$ și $P(1) = -2$, $P(\sqrt{2}) = 0$, să se rezolve ecuația $P(x) = 0$.
- b) Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $|a|, |b|, |c| \leq 2010$ și există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $P(x) = 0$, să se demonstreze că $x \leq 2010$.

Soluție:

$$a) \begin{cases} P(1) = -2 \\ P(\sqrt{2}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c = -3 \\ 2a+c+\sqrt{2}(b+2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c = -3 \\ 2a+c = 0 \\ b+2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -2 \end{cases} \dots\dots\dots 3p$$

$$P(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2 = (x+1)(x^2 - 2) \dots\dots\dots 1p$$

$$P(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -\sqrt{2}, x_3 = \sqrt{2}$$

b) Reducere la absurd.

Presupunem că $(\exists) x \geq 2011$, care să satisfacă condițiile date **1p**

$$P(x) = 0 \Rightarrow x^3 = -ax^2 - bx - c \leq 2010(x^2 + x + 1) = \frac{2010}{x-1} \cdot (x^3 - 1) \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Cum } x \geq 2011 \Rightarrow x-1 \geq 2010 \Rightarrow \frac{1}{x-1} \leq \frac{1}{2010} \Rightarrow \frac{2010}{x-1} \leq 1.$$

Obținem: $x^3 \leq x^3 - 1$ (absurd) **1p**

